INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1978. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS

1. Dans tout le problème, I désigne l'intervalle [0,1] de $\mathbb{R}$ et $I^2 = I \times I$.

2. $\mathcal{C}(I)$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I.
On le munit de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I) \; ; \quad \|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)| .$$

M(I) est l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur $\mathcal{C}(I)$.
On le munit de la norme naturellement associée à celle de $\mathcal{C}(I)$:

$$\forall \mu \in M(I) \; ; \quad \|\mu\| = \sup_{f \in B_1} |\mu(f)|$$

où B_1 est la boule unité fermée de $\mathcal{C}(I)$.

3. $\mathcal{C}(I^2)$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I^2, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall F \in \mathcal{C}(I^2) \; ; \quad \|F\| = \sup_{(x,y) \in I^2} |F(x,y)| .$$

$M(I^2)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur $\mathcal{C}(I^2)$ muni de la norme associée :

$$\forall \lambda \in M(I^2) \; ; \quad \|\lambda\| = \sup_{F \in B_2} |\lambda(F)|$$

où B_2 est la boule unité fermée de $\mathcal{C}(I^2)$.

4. Soit $F \in \mathcal{C}(I^2)$; $x \in I$. On note $F(x, .)$ l'application partielle :

$$y \longrightarrow F(x, y)$$

$F(x, .)$ appartient donc à $\mathcal{C}(I)$.

5. Soit $f \in \mathcal{C}(I)$; $g \in \mathcal{C}(I)$. On désigne par $f \otimes g$ l'élément de $\mathcal{C}(I^2)$ défini par la formule :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad (f \otimes g)(x, y) = f(x)\, g(y).$$

6. On dit qu'une fonction h est de classe C^1 sur un intervalle J, si h est continue et possède une dérivée continue sur J.

PARTIE I

Pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, on pose $m(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$.

1° Montrer que l'application ainsi définie de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathbb{R}$ appartient à M(I) et calculer $\|m\|$.

. . ./. . .

2° Soit $a \in I$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, on pose $\delta_a(f) = f(a)$.

Montrer que δ_a appartient à $M(I)$. Calculer $\| \delta_a \|$.

Calculer $\| \delta_a - \delta_b \|$ si a et b sont deux éléments distincts de I.

3° Calculer $\| m - \delta_a \|$.

4° Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, $\lim_{n \to \infty} \delta_{\frac{1}{n}}(f) = \delta_0(f)$.

La suite $\left\{ \delta_{\frac{1}{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ a-t-elle une limite dans $M(I)$?

A-t-on une propriété analogue dans $M(I^2)$?

5° Soit $\lambda \in M(I^2)$; $\theta \in \mathcal{C}(I)$. On définit deux applications $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$ de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathbb{R}$ par les formules :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I) \; ; \quad p_\theta(\lambda)(f) = \lambda(f \otimes \theta)$$
$$\forall f \in \mathcal{C}(I) \; ; \quad q_\theta(\lambda)(f) = \lambda(\theta \otimes f).$$

Montrer que $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$ appartiennent à $M(I)$.

Les applications p_θ et q_θ ainsi définies de $M(I^2)$ dans $M(I)$ sont-elles continues?

Partie II

1° Soit $F \in \mathcal{C}(I^2)$; $\nu \in M(I)$. Montrer que l'application F_ν de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in I$; $F_\nu(x) = \nu[F(x, .)]$ appartient à $\mathcal{C}(I)$.

Établir l'inégalité $\| F_\nu \| \leqslant \| F \| \cdot \| \nu \|$.

2° Soit $\mu \in M(I)$; $\nu \in M(I)$. On définit une application de $\mathcal{C}(I^2)$ dans $\mathbb{R}$, notée $\mu \otimes \nu$, par la formule

$$\forall F \in \mathcal{C}(I^2) \; ; \quad \mu \otimes \nu(F) = \mu(F_\nu).$$

a. Montrer que $\mu \otimes \nu$ appartient à $M(I^2)$.

b. Calculer $\| \mu \otimes \nu \|$ en fonction de $\| \mu \|$ et $\| \nu \|$.

c. Que peut-on dire de l'application $(\mu, \nu) \longrightarrow \mu \otimes \nu$?

Dans la suite, $\mathcal{E}$ désigne l'image de $M(I) \times M(I)$ par cette application.

3° *a.* Soit $\lambda \in \mathcal{E}$; $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathcal{C}(I)$ et $\beta \in \mathcal{C}(I)$ tels que

$$\lambda(\alpha \otimes \beta) = 1.$$

Montrer que pour tout couple (α, β) de $\mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I)$ vérifiant cette condition,

$$\lambda = p_\beta(\lambda) \otimes q_\alpha(\lambda).$$

b. Soit $\lambda = \delta_0 \otimes \delta_0 + \delta_1 \otimes \delta_1$.

On considère $\theta \in \mathcal{C}(I)$ défini par $\forall x \in I$; $\theta(x) = x$.

Calculer $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$.

c. $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M(I^2)$?

Partie III

Dans cette partie, φ désigne une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1; prenant ses valeurs dans I.

1° On pose

$$a_n = \int_0^1 \sqrt{1 + [n \varphi'(nx)]^2}\, dx.$$

Quelle interprétation géométrique peut-on donner du nombre a_n?

Montrer que la suite $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite l.

Exprimer l à l'aide d'une intégrale.

2° Pour tout $g \in \mathcal{C}(I)$, on pose

$$\nu(g) = \int_0^1 g[\varphi(x)] \, |\varphi'(x)| \, dx$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\nu_n(g) = \frac{1}{n} \int_0^1 g[\varphi(nx)] \sqrt{1 + [n \varphi'(nx)]^2}\, dx.$$

Montrer que ν et ν_n appartiennent à $M(I)$. .../...

Montrer que la suite $\{ \nu_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet ν pour limite dans l'espace vectoriel normé M (I).

3° Soit $F \in \mathcal{C}(I^2)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que les conditions $n > N$ et $0 \leqslant k < n$ impliquent

$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} F[x, \varphi(nx)] \sqrt{1 + [n\varphi'(nx)]^2}\, dx - \nu\left[F\left(\frac{k}{n}, \cdot\right) \right] \right| < \varepsilon .$$

4° Pour tout $F \in \mathcal{C}(I^2)$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\lambda_n(F) = \frac{1}{n} \int_0^1 F[x, \varphi(nx)] \sqrt{1 + [n\varphi'(nx)]^2}\, dx .$$

Montrer que λ_n appartient à $M(I^2)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in M(I^2)$ tel que, pour tout $F \in \mathcal{C}(I^2)$,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n(F) = \lambda(F) .$$

Montrer que λ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ défini dans II.

Partie IV

Dans cette partie, φ désigne une fonction de classe C^1 sur I, prenant ses valeurs dans I. On se propose d'étudier $\nu \in M(I)$ défini par la formule :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I) \ ; \quad \nu(f) = \int_0^1 f[\varphi(x)] \, |\varphi'(x)| \, dx .$$

1° Montrer que si φ est monotone, il existe deux réels a_1, a_2 tels que

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{C}(I) \ ; \quad \nu(f) = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx .$$

2° On suppose dans cette question que l'équation $\varphi'(x) = 0$ n'a qu'un nombre fini de racines dans I. Montrer qu'il existe une fonction en escalier ψ définie sur I

et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}(I) \ ; \quad \nu(f) = \int_0^1 f(x)\, \psi(x)\, dx .$$

3° Soit φ_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \sin^2 2\pi x & \text{pour } \dfrac{1}{2} < x < 1 , \\ \varphi_0(x) = 0 & \text{pour } x \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 1 . \end{cases}$$

Soit $\{ \alpha_k \}$ une suite *décroissante* de réels telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \ ; \quad \alpha_k \in]0, 1] \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0 .$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k}\, \varphi_0(2^k x) .$$

a. Tracer le graphe de φ_2 dans le cas $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est une fonction de classe C^1 prenant ses valeurs dans I et qu'il existe une fonction en escalier ψ_n définie sur I et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}(I) \quad \int_0^1 f[\varphi_n(x)] \, |\varphi'_n(x)| \, dx = \int_0^1 f(x)\, \psi_n(x)\, dx .$$

Expliciter ψ_2 associée à la fonction φ_2 de *a.*

Exprimer $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \psi_n(x)\, dx$ en fonction des α_k.

c. Montrer que la suite $\{ \varphi_n \}$ converge uniformément sur I et que sa limite est de classe C^1 et prend ses valeurs dans I. Étudier la convergence de la suite $\{ \gamma_n \}$.

d. Si φ est la limite de la suite $\{ \varphi_n \}$, montrer qu'il existe une fonction ψ définie sur I, prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon, 1]$ où $\varepsilon \in]0, 1[$ et telle que :

(*i*) l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)\, dx$ converge

(*ii*) $\forall f \in \mathcal{C}(I) \ ; \quad \nu(f) = \displaystyle\int_0^1 \psi(x) f(x)\, dx .$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail